

# Développements limités

## Calcul de développements limités

### Exercice 1 [01447] [correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- $DL_3(\pi/4)$  de  $\sin x$
- $DL_4(1)$  de  $\frac{\ln x}{x^2}$
- $DL_5(0)$  de  $\operatorname{sh}x\operatorname{ch}(2x) - \operatorname{ch}x$ .

### Exercice 2 [00226] [correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- $DL_3(0)$  de  $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
- $DL_3(0)$  de  $\ln(1 + \sin x)$
- $DL_3(1)$  de  $\cos(\ln(x))$

### Exercice 3 [00745] [correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- $DL_3(0)$  de  $\ln(1 + e^x)$
- $DL_3(0)$  de  $\ln(2 + \sin x)$
- $DL_3(0)$  de  $\sqrt{3 + \cos x}$

### Exercice 4 [00292] [correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- $DL_3(0)$  de  $e^{\sqrt{1+x}}$
- $DL_3(0)$  de  $\ln(1 + \sqrt{1+x})$
- $DL_3(0)$  de  $\ln(3e^x + e^{-x})$

### Exercice 5 [01448] [correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- $DL_2(0)$  de  $(1+x)^{1/x}$
- $DL_4(0)$  de  $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
- $DL_4(0)$  de  $\ln\left(\frac{\operatorname{sh}x}{x}\right)$

### Exercice 6 [01451] [correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- $DL_3(0)$  de  $\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$
- $DL_2(0)$  de  $\frac{\arctan x}{\tan x}$
- $DL_2(1)$  de  $\frac{x-1}{\ln x}$

### Exercice 7 [00751] [correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- $DL_3(0)$  de  $\frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$
- $DL_2(0)$  de  $\frac{\sin(x)}{\exp(x) - 1}$
- $DL_3(0)$  de  $\frac{x\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x - 1}$

### Exercice 8 [01449] [correction]

Former le  $DL_3(1)$  de  $\arctan x$

### Exercice 9 [01452] [correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- $DL_{10}(0)$  de  $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$
- $DL_{1000}(0)$  de  $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$

### Exercice 10 [01453] [correction]

Exprimer le développement limité à l'ordre  $n$  en 0 de  $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$  à l'aide de nombres factoriels.

### Exercice 11 [01454] [correction]

Pour  $\alpha = -1/2$  et  $k \in \mathbb{N}$ , exprimer

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

à l'aide de nombres factoriels.

En déduire une expression du  $DL_{2n+1}(0)$  de  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  puis du  $DL_{2n+2}(0)$  de  $\arcsin(x)$ .

**Exercice 12** [ 01455 ] [correction]

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer le développement limité à l'ordre  $2n + 2$  de  $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ .  
On pourra commencer par calculer la dérivée de cette fonction.

**Exercice 13** [ 01456 ] [correction]

Montrer que l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = xe^{x^2}$  admet une application réciproque définie sur  $\mathbb{R}$  et former le  $DL_5(0)$  de  $f^{-1}$ .

**Exercice 14** [ 03025 ] [correction]

En calculant de deux façons le développement limité à l'ordre  $n$  de  $(e^x - 1)^n$ , établir que pour tout  $0 \leq \ell \leq n$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} k^\ell}{\ell!} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < n \\ 1 & \text{si } \ell = n \end{cases}$$

**Exercice 15** [ 02519 ] [correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  et  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

- a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- b)  $f$  admet-elle un développement limité en 0? si oui à quel ordre maximal?

## Notion de développement asymptotiques

**Exercice 16** [ 01457 ] [correction]

Former le développement asymptotique en 0 de l'expression considérée à la précision demandée :

- a)  $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$  à la précision  $x^{5/2}$
- b)  $x^x$  à la précision  $(x \ln x)^2$

**Exercice 17** [ 01458 ] [correction]

Former le développement asymptotique en  $+\infty$  de l'expression considérée à la précision demandée :

- a)  $\sqrt{x+1}$  à la précision  $1/x^{3/2}$ .
- b)  $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$  à la précision  $1/x^2$ .
- c)  $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$  à la précision  $1/x^2$ .

**Exercice 18** [ 03431 ] [correction]

Former le développement asymptotique quand  $x \rightarrow +\infty$  de  $\arctan x$  à la précision  $1/x^3$ .

**Exercice 19** [ 01459 ] [correction]

Réaliser un développement asymptotique de la suite considérée à la précision demandée :

- a)  $u_n = \ln(n+1)$  à la précision  $1/n^2$
- b)  $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$  à la précision  $1/n^2$
- c)  $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$  à la précision  $1/n$
- d)  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  à la précision  $1/n^2$ .

**Exercice 20** [ 01476 ] [correction]

Former le développement asymptotique, en  $+\infty$ , à la précision  $1/n^2$  de

$$u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$$

## Applications à l'étude de fonctions

**Exercice 21** [ 01461 ] [correction]

Déterminer un équivalent simple des fonctions proposées au voisinage de 0 :

- a)  $x(2 + \cos x) - 3 \sin x$
- b)  $x^x - (\sin x)^x$
- c)  $\arctan(2x) - 2 \arctan(x)$

**Exercice 22** [ 01462 ] [correction]

Déterminer les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$

**Exercice 23** [ 01463 ] [correction]

Déterminer les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2x+3}{2x+1+5x/2} \right)^{1/(2-x)}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a}$

**Exercice 24** [01464] [correction]

Soit  $f : ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Montrer que  $f$  peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.

Quelle est alors la position relative de la courbe de  $f$  par rapport à sa tangente en ce point ?

**Exercice 25** [01465] [correction]

Soient  $a$  un réel non nul et  $f$  la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}$$

Déterminer les éventuelles valeurs de  $a$  pour lesquelles  $f$  présente un point d'inflexion en 0.

**Exercice 26** [01466] [correction]

Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 27** [01467] [correction]

Soit

$$f : x \mapsto (x+1)e^{1/x}$$

définie sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$ .

Former un développement asymptotique de  $f$  à la précision  $1/x$  en  $+\infty$ .

En déduire l'existence d'une droite asymptote en  $+\infty$  à la courbe représentative de  $f$ .

Etudier la position relative de la courbe et de son asymptote en  $+\infty$ .

**Exercice 28** [01468] [correction]

Soit

$$f : x \mapsto x(\ln(2x+1) - \ln(x))$$

définie sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$ .

Former un développement asymptotique de  $f$  à la précision  $1/x$  en  $+\infty$ .

En déduire l'existence d'une droite asymptote en  $+\infty$  à la courbe représentative de  $f$ .

Etudier la position relative de la courbe et de son asymptote en  $+\infty$ .

**Exercice 29** [01469] [correction]

Etudier les asymptotes de

$$x \mapsto \sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)}$$

**Exercice 30** [01470] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$ .

C'est ici un exemple de fonction non nulle dont tous les  $DL_n(0)$  sont nuls.

**Exercice 31** [01471] [correction]

Soit  $f : ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

a) Montrer que  $f$  est convexe sur  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .

b) Montrer que, pour tout  $x > 1$  on a :

$$\int_x^{x^2} \frac{x dt}{t \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 dt}{t \ln t}$$

En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln 2$ . De même, établir :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ln 2$ .

c) On prolonge  $f$  par continuité en 1, en posant  $f(1) = \ln 2$ .

Montrer que  $f$  ainsi prolongée est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$ .

Établir la convexité de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

## Application à l'étude de suites

### Exercice 32 [01472] [correction]

Déterminer un équivalent simple de la suite dont le terme général est :

$$\text{a) } 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \quad \text{b) } \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \quad \text{c) } {}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n}$$

### Exercice 33 [01473] [correction]

Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2} \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( (n+1)^{1/n} - n^{1/n} \right)$$

### Exercice 34 [01474] [correction]

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement supérieurs à 1. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$$

### Exercice 35 [01475] [correction]

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3} \right)^n$$

## Application à l'étude de points singuliers

### Exercice 36 [01480] [correction]

Pour chacune des courbes qui suivent, déterminer les points singuliers et préciser l'allure de la courbe au voisinage de ceux-ci :

$$\text{a) } \begin{cases} x(t) = t - t \ln t \\ y(t) = 1/\ln t \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = 2t^2 - t^4 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x(t) = t^2 + t^4 \\ y(t) = t^2 + t^5 \end{cases}$$

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

- a)  $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3 + o((x - \frac{\pi}{4})^3)$   
 b)  $\frac{\ln x}{x^2} = (x - 1) - \frac{5}{2}(x - 1)^2 + \frac{13}{3}(x - 1)^3 - \frac{77}{12}(x - 1)^4 + o((x - 1)^4)$   
 c)  $\operatorname{shxch}(2x) - \operatorname{chx} = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{121}{120}x^5 + o(x^5)$ .

### Exercice 2 : [énoncé]

- a)  $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = \ln(1+x^2) - \ln(1+x) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$   
 b)  $\ln(1 + \sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$   
 c)  $\cos(\ln x) = 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^3 + o((x - 1)^3)$ .

### Exercice 3 : [énoncé]

- a)  $\ln(1 + e^x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$   
 b)  $\ln(2 + \sin x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$   
 c)  $\sqrt{3 + \cos x} = 2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$

### Exercice 4 : [énoncé]

- a)  $e^{\sqrt{1+x}} = e + \frac{e}{2}x + \frac{e}{48}x^3 + o(x^3)$   
 b)  $\ln(1 + \sqrt{1+x}) = \ln 2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{96}x^3 + o(x^3)$   
 c)  $\ln(3e^x + e^{-x}) = 2 \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$

### Exercice 5 : [énoncé]

- a)  $(1+x)^{1/x} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$   
 b)  $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$   
 c)  $\ln\left(\frac{\operatorname{shx}}{x}\right) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$

### Exercice 6 : [énoncé]

- a)  $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1} = 1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + o(x^3)$   
 b)  $\frac{\arctan x}{\tan x} = 1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$   
 c)  $\frac{x-1}{\ln x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

### Exercice 7 : [énoncé]

- a)  $\frac{x-\sin x}{1-\cos x} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + o(x^3)$   
 b)  $\frac{\sin x}{\exp(x)-1} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$   
 c)  $\frac{x\operatorname{chx}-\operatorname{shx}}{\operatorname{chx}-1} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + o(x^3)$

### Exercice 8 : [énoncé]

On primitive de  $DL_2(1)$  de  $\frac{1}{1+x^2}$  :  
 $\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$ .

### Exercice 9 : [énoncé]

- a)  $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = 1 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{8}t^8 + o(t^9)$  dont  $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = t - \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{24}t^9 + o(t^{10})$   
 puis  $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o(x^{10})$   
 b)  $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right) = \ln(e^x - \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000})) = \ln(e^x) + \ln(1 - \frac{x^{1000}e^{-x}}{1000!} + o(x^{1000})) = x - \frac{1}{1000!}x^{1000} + o(x^{1000})$ .

### Exercice 10 : [énoncé]

$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} (-x)^k + o(x^n)$  avec  
 $\binom{-1/2}{k} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2k-1}{2})}{k!} = (-1)^k \frac{1.3\dots(2k-1)}{2^k k!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}$ .  
 Au final,  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} x^k + o(x^n)$

### Exercice 11 : [énoncé]

On a

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k \frac{1}{2} \frac{3}{2} \dots \frac{2k-1}{2}}{k!} = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

puis

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (2k+1) (k!)^2} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

**Exercice 12 :** [énoncé]

$\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2}$  et  $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + o(x^{2n+1})$ .  
 Donc  $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$ .

**Exercice 13 :** [énoncé]

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2} > 0$$

de plus  $\lim_{+\infty} f = +\infty, \lim_{-\infty} f = -\infty$ .

Donc  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  et  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

En particulier  $f^{-1}$  admet une  $DL_5(0)$ , de plus comme  $f$  est impaire,  $f^{-1}$  l'est aussi et le  $DL_5(0)$  de  $f^{-1}$  est de la forme :

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$$

En réalisant un  $DL_5(0)$  de  $f^{-1}(f(x))$  on obtient :

$$f^{-1}(f(x)) = ax + (a+b)x^3 + \left(\frac{1}{2}a + 3b + c\right)x^5 + o(x^5)$$

Or  $f^{-1}(f(x)) = x$ , donc :

$$a = 1, b = -1 \text{ et } c = \frac{5}{2}$$

**Exercice 14 :** [énoncé]

D'une part  $e^x - 1 = x + o(x)$  donne

$$(e^x - 1)^n = x^n + o(x^n)$$

D'autre part

$$(e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{kx}$$

or

$$e^{kx} = \sum_{\ell=0}^n \frac{k^\ell}{\ell!} x^\ell + o(x^n)$$

donc, en réordonnant les sommes

$$(e^x - 1)^n = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} k^\ell}{\ell!} x^\ell$$

L'unicité des développements limités entraîne la relation proposée.

**Exercice 15 :** [énoncé]

a)  $f$  est évidemment dérivable en tout  $a \in \mathbb{R}^*$  et aussi dérivable en 0 avec  $f'(0) = 0$ .

b)  $f$  admet pour développement limité à l'ordre  $n - 1$  :  $f(x) = o(x^{n-1})$ .

Si  $f$  admet un  $DL_n(0)$  celui-ci serait de la forme

$$f(x) = ax^n + o(x^n)$$

ce qui entraîne que  $\sin(1/x)$  admet une limite finie en 0 ce qui est notoirement faux.

**Exercice 16 :** [énoncé]

a)  $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^{5/2} + o(x^{5/2})$

b)  $x^x = 1 + x \ln x + \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x + o(x^2 \ln^2 x)$

**Exercice 17 :** [énoncé]

a)  $\sqrt{x+1} = \sqrt{x} \sqrt{1+1/x} = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ .

b)  $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x = -\ln x + 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

c)  $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e - \frac{e}{2} \frac{1}{x} + \frac{11e}{24} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

**Exercice 18 :** [énoncé]

On a pour  $x > 0$

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$$

donc

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

**Exercice 19 :** [énoncé]

a)  $\ln(n+1) = \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

b)  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{8} \frac{1}{n^{5/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$ .

c)  $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + \frac{1}{16n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

d)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

**Exercice 20 : [énoncé]**

On a

$$u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \sum_{k=0}^{n-4} \frac{k!}{n!}$$

Or

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-4} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-4} \frac{(n-4)!}{n!} \leq n \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = o(1/n^2)$$

Donc

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

**Exercice 21 : [énoncé]**

Par développements limités :

- a)  $x(2 + \cos x) - 3 \sin x \sim \frac{1}{60}x^5$
- b)  $x^x - (\sin x)^x = x^x(1 - (\frac{\sin x}{x})^x) \sim \frac{1}{6}x^3$
- c)  $\arctan(2x) - 2 \arctan(x) \sim -2x^3$

**Exercice 22 : [énoncé]**

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = -\frac{1}{2}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = -\frac{e}{2}$

**Exercice 23 : [énoncé]**

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{x/2}} \right)^{1/(2-x)} = \frac{1}{3} 6^{4/13} 5^{5/26}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x} = e$
- c)  $x^a - a^x \sim a^a(1 - \ln a)(x - a)$  si  $a \neq 1$  et  $\arctan(x) - \arctan(a) \sim (\arctan(a))'(x - a) = \frac{(x-a)}{1+a^2}$ .

Si  $a \neq 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a} = a^a(1 + a^2)(1 - \ln a)$$

Si  $a = 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a} = 2$$

**Exercice 24 : [énoncé]**

On a

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

Par suite  $f$  peut être prolongée par continuité en 0 en posant  $f(0) = -\frac{1}{2}$ .

De plus ce prolongement est dérivable en 0 et  $f'(0) = \frac{1}{3}$ .

L'équation de la tangente en 0 est  $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$  et la courbe est localement en dessous de celle-ci.

**Exercice 25 : [énoncé]**

On a

$$f(x) = ax - a(1 + \frac{1}{2}a)x^2 + a(1 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a^2)x^3 + o(x^3)$$

Pour que  $f$  présente un point d'inflexion en 0, il faut que  $a(1 + \frac{1}{2}a) = 0$  i.e. :  $a = -2$ .

Inversement si  $a = -2$ ,

$$f(x) = -2x - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

et par suite  $f$  présente un point d'inflexion en 0.

**Exercice 26 : [énoncé]**

$f$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  et se prolonge par continuité en 0 en posant  $f(0) = 1$ .

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

donc  $f$  est dérivable en 0 avec  $f'(0) = -1/2$  et finalement  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 27 : [énoncé]**

On a

$$f(x) = (x + 1)e^{1/x} = x + 2 + \frac{3}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Par suite, la droite d'équation  $y = x + 2$  est asymptote à la courbe et la courbe est au dessus de celle-ci.

**Exercice 28 : [énoncé]**

On a

$$f(x) = x(\ln(2x + 1) - \ln(x)) = \ln 2 \cdot x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La droite d'équation  $y = \ln 2 \cdot x + \frac{1}{2}$  est asymptote à la courbe et la courbe est en dessous de celle-ci.

**Exercice 29 : [énoncé]**

On a

$$\sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)} = x \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}} = x + 1 - \frac{5}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La droite d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe en  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).  
Courbe en dessous (resp. au dessus) de l'asymptote en  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

**Exercice 30 : [énoncé]**

$f$  est évidemment de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

Montrons par récurrence que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et que  $f^{(n)}$  est de la forme :

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2}$$

pour  $x \neq 0$  avec  $P_n \in \mathbb{R}[X]$ .

Pour  $n = 0$  : ok.

Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 0$ .

$f^{(n)}$  est continue, dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et pour  $x \neq 0$ ,

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2} P_n' \left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3} P_n \left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = P_{n+1} \left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$$

avec  $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ .

Récurrence établie.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(x) \underset{y=1/x^2}{=} P_n(\sqrt{y})e^{-y} \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0^+$  et de même quand

$x \rightarrow 0^-$ .

Par le théorème du prolongement  $\mathcal{C}^1$  dans une version généralisée, on obtient que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $f^{(n)}(0) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Par suite  $f^{(n)}$  est dérivable en 0 et  $f^{(n+1)}(0) = 0$ .

**Exercice 31 : [énoncé]**

a) Soit  $G$  une primitive de la fonction  $t \mapsto 1/\ln t$  sur  $]0, 1[$  (resp. sur  $]1, +\infty[$ ).

Pour tout  $x \in ]0, 1[$  (resp.  $]1, +\infty[$ ), on a  $f(x) = G(x^2) - G(x)$ . On en déduit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, 1[$  (resp. sur  $]1, +\infty[$ ) et

$$f'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$

On a alors

$$f''(x) = \frac{x \ln x - x + 1}{x(\ln x)^2}$$

Soit  $g(x) = x \ln x - x + 1$  sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$ .

$g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $g'(x) = \ln(x)$ . Puisque  $g(1) = 0$ , la fonction  $g$  est positive puis  $f'' \geq 0$  sur  $]0, 1[$  (resp.  $]1, +\infty[$ ).

b) Pour  $x > 1$ ,

$$\forall t \in [x, x^2], \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}$$

D'où

$$\int_x^{x^2} \frac{x dt}{t \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 dt}{t \ln t}$$

Comme  $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \ln 2$ , on obtient

$$x \ln 2 \leq f(x) \leq x^2 \ln 2$$

puis  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln 2$ .

Pour  $x < 1$ ,

$$\forall t \in [x^2, x], \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}$$

D'où

$$\int_x^{x^2} \frac{x^2 dt}{t \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{x dt}{t \ln t}$$

On obtient  $x^2 \ln 2 \leq f(x) \leq x \ln 2$  puis  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ln 2$ .

c)  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$  et

$$f'(1+h) = \frac{h}{\ln(1+h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$$

Par le théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$ , on a  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $f'(1) = 1$ .

De même, en exploitant

$$f''(1+h) = \frac{(1+h) \ln(1+h) - h}{(1+h)(\ln(1+h))^2} \sim \frac{h^2/2}{(1+h)h^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$



on obtient que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $f''(1) = 1/2$ .  
Comme  $f''$  est positive sur  $]0, +\infty[$ , on peut conclure que  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$ .

**Exercice 32 : [énoncé]**

a)

$$2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim \frac{1}{4n\sqrt{n}}$$

b)

$$\frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n} - 1)} \sim \frac{1/n}{1/2n^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

c)  $n^{+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} - e^{\frac{\ln n}{n}}$  or

$$e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} = 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right)^3 + o\left( \frac{(\ln n)^3}{n^3} \right)$$

et

$$e^{\frac{\ln n}{n}} = 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2} \left( \frac{\ln n}{n} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\ln n}{n} \right)^3 + o\left( \frac{(\ln n)^3}{n^3} \right)$$

donc

$$n^{+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} = -\frac{\ln n}{n^2} + o\left( \frac{\ln n}{n^2} \right) \sim -\frac{\ln n}{n^2}$$

**Exercice 33 : [énoncé]**

a)  $n \sin \frac{1}{n} \sim \frac{n}{n} = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$

b)  $(n \sin \frac{1}{n})^{n^2} = e^{n^2 \ln(n \sin \frac{1}{n})} = e^{-\frac{1}{6} + o(1)}$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin \frac{1}{n})^{n^2} = \frac{1}{6e}$ .

c)  $n^2 ((n+1)^{1/n} - n^{1/n}) = e^{\frac{\ln n}{n}} n^2 (e^{\frac{\ln(1+1/n)}{n}} - 1) \sim e^{\frac{\ln n}{n}}$  donc  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 ((n+1)^{1/n} - n^{1/n}) = 1$

**Exercice 34 : [énoncé]**

On a

$$\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} = \frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} = \frac{e^{\frac{\ln a}{n}} + e^{\frac{\ln b}{n}}}{2} = 1 + \frac{\ln a + \ln b}{2n} + o(1/n)$$

donc

$$\left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = e^{n(\ln(1 + \frac{\ln a + \ln b}{2n} + o(1/n)))} = e^{\frac{\ln a + \ln b}{2} + o(1)} \rightarrow \sqrt{ab}$$

**Exercice 35 : [énoncé]**

On a

$$3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3} = 3e^{\frac{1}{n} \ln 2} - 2e^{\frac{1}{n} \ln 3} = 1 + \frac{3 \ln 2 - 2 \ln 3}{n} + o\left( \frac{1}{n} \right)$$

donc

$$\left( 3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3} \right)^n = e^{n \ln(3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3})} = e^{\ln(8/9) + o(1)} \rightarrow \frac{8}{9}$$

**Exercice 36 : [énoncé]**

Notons  $M(t)$  le point courant de l'arc considéré.

a) On a

$$\begin{cases} x'(t) = \text{th}^2 t \\ y'(t) = -\text{sh}t/\text{ch}^2 t \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$$

Le point  $M(0)$  est le seul point singulier. Puisque

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 + o(t^3) \\ y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \end{cases}$$

On obtient  $p = 2, q = 3$  car

$$\begin{vmatrix} 0 & 1/3 \\ -1/2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

On a un point de rebroussement de première espèce, tangente dirigée par  $\vec{u}(0, -1)$ .

b) On a

$$\begin{cases} x'(t) = 3(1 - t^2) \\ y'(t) = 4t(1 - t^2) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \pm 1$$

Les points  $M(1)$  et  $M(-1)$  sont les seuls points singuliers. Puisque

$$\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$$

$M(-t)$  est symétrie de  $M(t)$  par rapport à  $(Oy)$ . Il suffit d'étudier  $M(1)$ . On a

$$\begin{cases} x(1+h) = 2 - 3h^2 - h^3 \\ y(1+h) = 1 - 4h^2 - 4h^3 + o(h^3) \end{cases}$$

donc  $p = 2$  et  $q = 3$  car

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$$

On a un point de rebroussement de première espèce, tangente dirigée par  $\vec{u}(-3, -4)$ .

c) On a

$$\begin{cases} x'(t) = 2t + 4t^3 \\ y'(t) = 2t + 5t^4 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$$

Le point  $M(0)$  est le seul point singulier. Puisque

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t^4 \\ y(t) = t^2 + o(t^4) \end{cases}$$

donc  $p = 2$  et  $q = 4$  car

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

On a un point de rebroussement de seconde espèce, tangente dirigée par  $\vec{u}(1, 1)$ .

Puisque

$$y(t) - x(t) = t^5 - t^4 = t^4(1 - t)$$

$M(t)$  est en dessous de sa tangente en  $M(0)$ .

Pour  $t \geq 0$ ,

$$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) \leq y(t) \end{cases}$$

donc  $M(-t)$  est en dessous de  $M(t)$ .